Домашнее задание: "Функциональные области логистики". Часть 3

Теория массового обслуживания (ТМО)

В производственной деятельности и повседневной жизни часто возникают такие ситуации, когда появляется необходимость в обслуживании требований или заявок, поступающих в систему. Иногда системы обслуживания обладают ограниченными возможностями для удовлетворения спроса, и это приводит к образованию очередей.

Задачами теории массового обслуживания являются анализ и исследование явлений, возникающих в системах обслуживания. Одна из основных задач теории заключается в определении таких характеристик системы, которые обеспечивают заданное количество функционирования, например, минимум времени ожидания, минимум средней длины очереди и т.д. Общей особенностью задач, связанных с массовым обслуживанием является случайный характер исследуемых явлений. Количество требований на обслуживание, временные интервалы между их поступлениями и длительность обслуживания случайны.

Всякой системе массового обслуживания характерна структура, которая определяется составом элементов и функциональными связями. Основные элементы системы следующие:

- входящий поток требований,
- каналы обслуживания, очередь требований и
- выходящий поток требований.

Другой признак классификации время пребывания требований в системе до начала обслуживания. По этому признаку все системы можно делить на три группы: системы с неограниченным временем ожидания, системы с отказами (с потерями) и системы смешанного типа.

Средняя длина очереди

$$R = \frac{K^{n+1}}{2^n - K^n}$$

Среднее время ожидания в очереди

$$\mathrm{T} = \frac{K^2}{M(2^n - K^n)}$$

К – это коэффициент загрузки, который рассчитывается как

$$\mathrm{K} = \frac{L}{M}$$

Более подробно см., например: Саакян Г.Р. Теория массового обслуживания. Лекции. Для студентов экономических специальностей очной, заочной и дистанционной форм обучения. ЮРГУЭС. Шахты, 2006. – 26 с.

Где, L – количество заявок, поступающих единицу времени t

M – количество выполненных заявок единицу времени t

$$M = \frac{t}{t_z}$$

ПРИМЕР.

Стивидорная компания осуществляет разгрузку судов в морском порту. В среднем за сутки в порт прибывает 6 судов. Время разгрузки одного судна составляет 7 часов.

Определить необходимое количество портовых кранов, время ожидания судна под разгрузкой и среднюю длину очереди.

$t_z = 7$ часов $\quad M = \frac{24}{7} = 3,43$

$t = 24$ часа^2

$L = 6$ $\quad K = \frac{6}{3,43} = 1,75$

При n=1:

R=$\frac{K^{n+1}}{2^n - K^n}$ = $\frac{K^2}{2 \quad - K}$=$\frac{1,75^2}{2 - 1,75}$ = $\frac{3.06}{0,25}$ = 12,25 судов

T=$\frac{K^2}{M(2^n - K^n)}$ = $\frac{K^2}{M(2 \quad - K \quad)}$ = $\frac{1,75^2}{3,43(2 - 1,75)}$ = $\frac{3.06}{0,85}$ = 3,6 суток

При n=2:

R=$\frac{K^{n+1}}{2^n - K^n}$ = $\frac{K^3}{2^2 - K^2}$=$\frac{1,75^3}{4 - 3,06}$ = $\frac{5,36}{0,94}$ = 5,7 судов

T=$\frac{K^2}{M(2^n - K^n)}$ = $\frac{K^2}{M(2^2 - K^2)}$ = $\frac{1,75^2}{3,43(4 - 3,06)}$ = $\frac{3.06}{3,2}$ = 0,96 суток

При n=3:

R=$\frac{K^{n+1}}{2^n - K^n}$ = $\frac{K^4}{2^3 - K^3}$=$\frac{1,75^4}{8 - 5,36}$ = $\frac{9,36}{2,64}$ = 3,5 судов

T=$\frac{K^2}{M(2^n - K^n)}$ = $\frac{K^2}{M(2^3 - K^3)}$ = $\frac{1,75^2}{3,43(8 - 5,36)}$ = $\frac{3.06}{8,98}$ = 0,34 суток

Ответ: требуется 3 крана

В ТМО обычно полученные значения не округляют, так как считается, что полученная в результате расчётов величина характеризует не физическую величину объекта обслуживания (например, покупателя), а обслуженную величину его запроса, покупки. Например, если расчётная величина интенсивности обслуживания покупателей в зоне кассового обслуживания получилось 2,5 в минуту, то это означает, что кассир за это время успел пробить на кассе все покупки из корзины 2-х покупателей и половину корзины 3-го покупателя. Поэтому округление для характеристики функционирования системы обслуживания будет не корректным.

Задачи

1. Склад осуществляет хранение, развес и упаковку различных сортов чая. В среднем в час работниками склада обрабатывается 17 заказов. На упаковку одного заказа расходуется в среднем 6 минут. Рассчитать среднюю длину очереди и среднее время ожидания в очереди для различных значений n и выбрать наиболее подходящее.

$t_z = 6$ минут

t = 60 минут
L = 17 – количество заказов поступающих единицу времени t

M = t / t_z – количество выполненных заказов единицу времени t
M = 60 / 6 = 10

K = L / M – коэффициент загрузки
K = 17 / 10 = 1,7

Средняя длина очереди: $R = \frac{K^{n+1}}{2^n - K^n}$

Среднее время ожидания в очереди: $T = \frac{K^2}{M(2^n - K^n)}$

При n = 1:

$$R = \frac{K^{n+1}}{2^n - K^n} = \frac{K^2}{2-K} = \frac{1,7^2}{2-1,7} = \frac{2,89}{0,3} = 9,63$$

$$T = \frac{K^2}{M(2^n - K^n)} = \frac{K^2}{M(2-K)} = \frac{1,7^2}{10(2-1,7)} = \frac{2,89}{3} = 0,96$$

При n = 2:

$$R = \frac{K^{n+1}}{2^n - K^n} = \frac{K^3}{2^2 - K^2} = \frac{1,7^3}{4-2,89} = \frac{4,913}{1,11} = 4,43$$

$$T = \frac{K^2}{M(2^n - K^n)} = \frac{K^2}{M(2^2 - K^2)} = \frac{1,7^2}{10(4-2,89)} = \frac{2,89}{11,1} = 0,26$$

При n = 3:

$$R = \frac{K^{n+1}}{2^n - K^n} = \frac{K^4}{2^3 - K^3} = \frac{1,7^4}{8-4,913} = \frac{8,3521}{3,087} = 2,71$$

$$T = \frac{K^2}{M(2^n - K^n)} = \frac{K^2}{M(2^3 - K^3)} = \frac{1,7^2}{10(8-4,913)} = \frac{2,89}{30,87} = 0,09$$

ОТВЕТ: при n = 3

2. Интенсивность потока телефонных звонков в агентство по заказу железнодорожных билетов, составляет 30 вызовов в час. Продолжительность оформления заказа на билет равна 2.4 минуты. Рассчитать среднюю длину очереди звонков, находящихся в режиме ожидания и среднее время ожидания разговора для различных значений n и выбрать наиболее подходящее.

t_z = 2,4 минуты
t = 60 минут
L = 30 – количество звонков поступающих единицу времени t

M = t / t_z – количество оформленных заказов единицу времени t
M = 60 / 2,4 = 25

K = L / M – коэффициент загрузки
K = 30 / 25 = 1,2

Средняя длина очереди: $R = \frac{K^{n+1}}{2^n - K^n}$

Среднее время ожидания в очереди: $T = \frac{K^2}{M(2^n - K^n)}$

При n = 1 имеем систему массового обслуживания (СМО) с одним каналом (один телефонный номер) с отказами:

$$R=\frac{K^{n+1}}{2^n-K^n}=\frac{K^2}{2-K}=\frac{1,2^2}{2-1,2}=\frac{1,44}{0,8}=1,8$$

$$T=\frac{K^2}{M\left(2^n-K^n\right)}=\frac{K^2}{M\left(2-K\right)}=\frac{1,2^2}{25\left(2-1,2\right)}=\frac{1,44}{20}=0,072$$

При n = 2 имеем систему массового обслуживания (СМО) с двумя каналами (два телефонных номера) с вероятностью того, что в системе заявка (телефонная линия занята):

$$R=\frac{K^{n+1}}{2^n-K^n}=\frac{K^3}{2^2-K^2}=\frac{1,2^3}{4-1,44}=\frac{1,728}{2,56}=0,675$$

$$T=\frac{K^2}{M\left(2^n-K^n\right)}=\frac{K^2}{M\left(2^2-K^2\right)}=\frac{1,2^2}{25\left(4-1,44\right)}=\frac{1,44}{64}=0,0225$$

При n = 3 имеем систему массового обслуживания (СМО) с тремя каналами (три телефонных номера) с вероятностью того, что в системе свободна (телефонная линия свободна):

$$R=\frac{K^{n+1}}{2^n-K^n}=\frac{K^4}{2^3-K^3}=\frac{1,2^4}{8-1,728}=\frac{2,0736}{6,272}=0,3306$$

$$T=\frac{K^2}{M\left(2^n-K^n\right)}=\frac{K^2}{M\left(2^3-K^3\right)}=\frac{1,2^2}{25\left(8-1,728\right)}=\frac{1,44}{156,8}=0,0092$$

ОТВЕТ: при n = 3 имеем систему массового обслуживания (СМО) с тремя каналами (три телефонных номера) с вероятностью того, что в системе свободна (телефонная линия свободна)